

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

47e jaargang
1971/1972
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

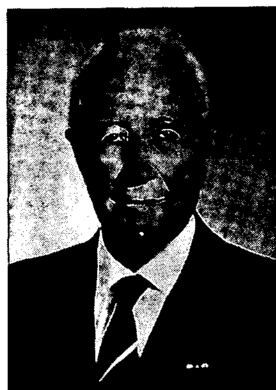
Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 15,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 200,—, $^1/_2$ pag. *f* 110,– en $^1/_4$ pag. *f* 60,—.

In memoriam

P. WIJDENES. 1872 — 1972



Op 17 februari 1972 is op het in de wiskundewereld van Nederland zo bekende adres, Jacob Obrechtstraat 88, Amsterdam, de nestor van de Nederlandse wiskundeleraren, P. Wijdenes, in zijn honderdste levensjaar onderleden.
Wijdenes, geboren in het Noordhollandse Opperdoes, ontving zijn opleiding tot onderwijzer aan de toenmalige Rijkskweekschool te Middelburg en was na het behalen van de middelbare akten K_1 , K_5 en K_{12} achtereenvolgens leraar in Almelo, Rotterdam en Amsterdam.
Gaarne herdenken we hem in dit tijdschrift tot de oprichting waarvan hijzelf nu al bijna een halve eeuw geleden het initiatief nam.
Wijdenes heeft door zijn veelzijdige publicistische actviteiten in de eerste helft van deze eeuw in hoge mate bijgedragen tot de verhoging van het peil van ons wiskunde-onderwijs en is daarmee geworden tot een der belangrijkste zo niet de belangrijkste auteur en didacticus van deze periode. Zijn betekenis doet niet onder voor die van J. Versluys die in de eerste vijftig jaar van het bestaan van de h.b.s. op het wiskunde-onderwijs aan dit schooltype eveneens een overheersende invloed heeft uitgeoefend.
Wijdenes oefende die invloed niet alleen uit door zijn veelgebruikte leerboeken van v.h.m.o. en u.l.o., maar tevens en in wellicht nog sterkere mate door zijn mondelinge en schriftelijke opleidingen voor de diverse akten-opleidingen, door de leerboeken die hij voor deze opleidingen schreef, door zijn initiatieven voor de oprichting van het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* en van *Euclides* en voorts door de wijze waarop hij tal van auteurs van gezag heeft weten te stimuleren tot het schrijven van leerboeken voor de middelbare-aktestudie en van werken die van betekenis waren voor de nascholing van de wiskundedocenten.
Om de betekenis van dit laatste beter te doorzien, beseffe men, dat in het begin van de negentiende eeuw studerenden voor de middelbare akten nog in sterke mate aangewezen waren op buitenlandse leerboeken.
Ook tot de oprichting van de wiskundige periodieken *Christiaan Huygens, Simon Stevin, Compositio Mathematica* heeft Wijdenes bijgedragen.
Tal van wiskundeleraren in ons land van een oudere generatie kunnen zich oud-leerlingen van Wijdenes noemen of weten zich althans door zijn geschriften in sterke mate beinvloed.

Wijdenes heeft meer dan 60 schoolboeken geschreven en daaronder zijn er vele die meer dan 20 drukken hebben beleefd. Zijn Algebra voor MULO beleefde zelfs 70 drukken en ik heb de indruk dat juist door dit schoolboek mèt de studieboeken geschreven voor de akte wiskunde-l.o. Wijdenes op het wiskunde-onderwijs op ulo-scholen in bijzonder sterke mate zijn stempel heeft gedrukt. Door zijn Nieuwe Schoolalgebra en zijn talrijke schoolboeken voor meetkunde is overigens zijn invloed op het wiskunde-onderwijs bij het v.h.m.o. eveneens buitengewoon groot geweest. Er is trouwens geen schooltype aan te wijzen waar die invloed niet is doorgedrongen.
Voor een uitvoerig overzicht van Wijdenes' indrukwekkend oeuvre verwijzen we naar de vijftigste jaargang van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, waarin we ook bovenstaand portret aantreffen dat een goede indruk geeft van de markante persoonlijkheid van de toen 90-jarige.
De *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* (voorheen Wimecos) eerde bij gelegenheid van haar 25-jarig jubileum Wijdenes' verdiensten voor het wiskunde-onderwijs in Nederland door hem tot erelid te benoemen. Ook het *Wiskundig Genootschap* telde Wijdenes onder zijn ereleden.
In het wiskunde-onderwijs in ons land hebben zich gedurende Wijdenes' leven ingrijpende wijzigingen voltrokken. In een periode waarin aan de rekenvaardigheid van onze leerlingen grotere eisen moesten worden gesteld dan thans nog noodzakelijk worden geacht maakte Wijdenes zich verdienstelijk door het samenstellen van logaritmen- en rentetafels voor de onderscheiden schooltypen. Hij ijverde daarbij voor een decimale hoekindeling, o.a. in zijn *'Five Place Tables'*, waarmee hij aan zijn tafelwerk een westeuropees cachet wist te geven. Hij ijverde zijn leven lang voor degelijk meetkunde-onderwijs op euclidische grondslag. Het terugdringen van de meetkunde in onze schoolprogramma's en meer in het bijzonder van het constructief element in dat meetkunde-onderwijs heeft hij moeilijk kunnen accepteren. Hij verzette zich in de vijftiger jaren krachtig tegen de invoering van de scheve projectie in het stereometrie-programma en wenste deze vervangen te zien door de door hem ontworpen klinografische projectie. Het getij verliep echter snel voor alle meetkunde-onderwijs in euclidische geest.
Begrijpelijkerwijze was het voor hem een bittere ervaring dat zijn degelijke leerboeken in 1968 van de boekenmarkt moesten verdwijnen. Zijn gebrek aan vertrouwen in de modernisering van het gehele wiskunde-onderwijs heeft hij daarbij nimmer onder stoelen of banken geschoven.
Nog in de vijftiger jaren verscheen er een nieuw leerboek van zijn hand, en tot in de laatste jaren toe werd er een korrel van hem in Euclides geplaatst.

Wanneer eens de geschiedenis van het wiskunde-onderwijs in Nederland in de eerste helft van deze eeuw zal worden geschreven zal er aan de grote betekenis die Wijdenes er in deze periode voor heeft gehad stellig grote aandacht worden geschonken.

Joh. H. Wansink.

Het parallellisme in ons onderwijs

W. KLEIJNE

Heerenveen

In dit artikel gaan we na hoe het begrip 'parallel met' in ons onderwijs wordt geintroduceerd. Dit doen we door enige schoolboeken op dit punt te vergelijken. We maken dan een keus uit diverse mogelijkheden om tot een voor onze leerlingen verantwoorde fundering te komen van enige zaken omtrent het parallellisme.
Vooraf enkele algemeen didaktische opmerkingen. In de didaktische situatie worden kind en leerstof als twee polen tegenover elkaar geplaatst. Dat houdt voor ons als docenten de opdrachten in het kind naar de leerstof en de leerstof naar het kind te brengen. Dit betekent voor de wiskunde dat we met respect voor het typisch kinderlijke een (afhankelijk van het kind in deze leersituatie) zo groot mogelijke mate van exactheid moeten nastreven.
Welk 'polen' hebben we in ons geval? Allereerst een kind van 12 à 13 jaar, dat in het algemeen sterk gericht is op zijn belevingswereld ten opzichte waarvan het een kritisch nuchtere instelling ontwikkelt en waarvoor het interesse aan de dag legt voor wetmatigheden en algemene samenhangen voor zover het gaat over zakelijk controleerbare feiten. Zijn abstractievermogen, hoewel nog niet groot, begint zich te ontwikkelen.
Zo'n kind wordt geplaatst tegenover het begrip evenwijdigheid dat zuiver wiskundig als volgt gefundeerd kan worden.
In de affiene groep, als ondergroep van de projectieve groep, beschouwen we een rechte die invariant is ten opzichte van z.g. affiene afbeeldingen. Rechten, die elkaar op deze invariante rechte snijden, heten van dezelfde richting. We noemen ze parallel. Pas na invoering van een metriek, waarbij we de affiene groep verlaten hebben, kunnen we aan parallelle rechten de naam 'evenwijdig' toekennen.
Hoe kunnen we het begrip 'parallel met' bij de brugklasleerling introduceren? Daartoe gaan we enige definities na zoals die in moderne schoolboeken voorkomen.

a 'Inplaats van AA' heeft dezelfde richting als BB' zeggen we in de meetkunde AA' is parallel aan BB'; notatie $AA'//BB'$"

b 'Lijnen die een gemeenschappelijke loodlijn hebben noemt men evenwijdig of parallel'

c 'Twee lijnen die geen enkel punt gemeen hebben, zijn evenwijdig.'

d 'Als we in een plat vlak twee rechten tekenen, kunnen zich drie gevallen voordoen.

  1 de doorsnede bestaat uit één punt
  2 de doorsnede is leeg
  3 de rechten vallen samen

In geval twee en drie noemen we de rechten evenwijdig en we schrijven $a//b$.'
e 'Lijnen die in eenzelfde richting lopen, noemen we evenwijdige lijnen.'
f 'Deze lijnen ontmoeten elkaar nooit. Zij zijn net als de rails van een spoorlijn... Een spoorbaan is overal even wijd. De linker en rechter rail noemt men dan ook evenwijdig of parallel.'

Dat elk van deze definities rekening wil houden met het kinderlijk bevattingsvermogen staat buiten kijf. We zullen de gegeven definities nader onderzoeken op meerdere of mindere exactheid, waarbij we wel in het oog moeten houden, dat een bepaalde definitie in dat boek zo en niet anders gegeven wordt en wel met het oog op de latere behandelingswijze van de meetkunde. Direct vallen echter de verschillen in de definities op. Er zijn er, die uitgaan van het begrip richting (def. a en e), van een gemeenschappelijke loodlijn (b), van verzamelingen (c, d), terwijl definitie f naast het parallel zijn ook nog het 'even wijd' expliciet vermeldt.

Het begrip richting kunnen we natuurlijk voor de leerlingen niet zoals boven definiëren. Ook een definitie als : 'Een richting is een equivalentieklasse, in de equivalentierelatie //, van alle lijnen // met een gegeven lijn' is onbruikbaar daar ze kennis van evenwijdigheid vooronderstelt. Er komen bovendien voor de brugklasser onverteerbare zaken in voor, zoals relaties, equivalentierelaties en klassen. Het richtingsbegrip zou ook gekoppeld kunnen worden aan de hoek die een rechte met een andere rechte aan een bepaalde kant maakt. We laden hiermee het begrip evenwijdigheid zeer zwaar. Een hoekmaat is geen affien begrip, terwijl het begrip 'parallel met' dat wel is.

Het begrip richting komt er in de diverse boeken karig van af. In wezen blijft het volledig in de intuïtieve sfeer. Daarmee wordt ook aan het parallellisme weinig grond gegeven. Voor de brugklasser is dit niet zo'n ramp. We vragen ons echter af of er geen andere wijze van werken mogelijk is, die zowel didaktisch als mathematisch meer aanvaardbaar is.

Ook de definities b, voortkomend uit de transformatiegedachte in de meetkunde, en (in zekere zin) f doen geen recht wedervaren aan 'parallel met' als affien begrip. Bovendien is het begrip snijden al aan bod geweest, terwijl over het niet-snijden gezwegen wordt. Zit hier onbewust bij ons achter, dat het niet-snijden binnen onze schoolmeetkunde een 'negatieve karakteristiek' is? (E.H. Schmidt in Nieuw tijdschrift voor wiskunde jaargang 51 pag. 229). Waarom is voor ons het snijden primair en het niet snijden secundair? E.H. Schmidt: 'De aanschouwing geeft ons dergelijke lijnen niet'. Echter, de aanschouwing geeft ons helemaal geen lijnen. Het gaat er hierbij om of de leerling zich een (denk)voorstelling van snijdende en evenwijdige lijnen kan vormen, of hij zich deze begrippen kan indenken, al of niet geholpen door een meer of minder geschikt model, b.v. een (draad)kubus. Hieraan is iedere leerling het verschil tussen snijden, parallel zijn met, kruisen duidelijk te maken. Afgezien van het kruisen zullen we het tot nu toe voor de leerling 'woordloze kennen' van het verschil tussen snijden en parallel-met moeten expliciteren. Daarbij is het zaak nauw aan te sluiten enerzijds bij ons model, anderzijds bij het wiskundig taalgebruik.

Een definitie als d is in dit verband alleszins aanvaardbaar. De taal is immers de taal der verzamelingen, die we in ons onderwijs zo consequent mogelijl willen spreken en waarin we de leerlingen stelselmatig oefenen. Hierbij is stellig het begrip

doorsnede ter sprake gekomen, evenals het al of niet leeg zijn hiervan. Didaktisch lijkt het mij nu dan ook volledig aanvaardbaar onze brugklasleerlingen deze definitie voor te zetten.
En het mathematische aspect? Deze definitie postuleert de existentie van drieërlei soorten lijnenparen t.w.

1 samenvallende, $l_1 = l_2$
2 snijdende, $l_1 \cap l_2$ is singleton
3 parallelle, $l_1 \cap l_2 = \phi$

waarbij we samenvallende lijnen desgewenst parallel kunnen noemen. Met deze definitie zijn we bovendien binnen de affiene meetkunde gebleven. Naar mijn mening hebben we nu een naar beide zijden aanvaardbare definitie gevonden.
Het begrip richting echter is uit deze laatste beschouwing geheel verdwenen.
Na de brugklas komt dit begrip stellig weer te voorschijn, al was het alleen maar via het begrip richtingscoëfficiënt. In ons huidig v.w.o. krijgen we echter de kans het richtingsbegrip in de loop der jaren stevig te funderen. Via begrippen als relaties, equivalentierelaties met klassen moet het voor de leerlingen mogelijk zijn tot het inzicht te komen, dat een richting een equivalentieklasse is in de equivalentierelatie parallel-met. In de door mij geraadpleegde schoolboeken zijn er maar twee, die zover gaan t.w.
'Wiskunde v.w.o. 3' van dr. P.G.J. Vredenduin en 'Getal en ruimte' deel 4V1 van K. de Bruin e.a.
Nu is ook het begrip oneigenlijk punt geïntroduceerd. Daar de leerlingen dit begrip niet behoeven te hanteren, zou ik deze naam in ons onderwijs niet willen gebruiken, teneinde onjuiste ideeën omtrent punten en het oneindige te vermijden.
Het gaat erom, dat zaken als parallellisme en richting nu scherp gesteld zijn.
Deze kunnen dan later voor de liefhebbers in het keuzeonderwerp projectieve meetkunde of niet-euclidische meetkunde in een nog ruimer kader geplaatst worden. Begrippen als oneigenlijk punt en oneigenlijke rechte kunnen dan stellig aan de orde komen.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXXIV De zwaartepunten van een simplex

1 Bij een *driehoek* kan men *drie* meetkundige zwaartepunten onderscheiden: dat van de *hoekpunten* (G_0), dat van de omtrek (G_1) en dat van de *oppervlakte* (G_2). G_0 en G_2 vallen samen in het punt G dat als *het* zwaartepunt bekend is. G_1 is in het algemeen van G verschillend. Immers als van de driehoek $A_1A_2A_3$ de zijden a_i en de hoogten h_i zijn, dan geldt voor de afstanden x_i van G_1 tot de zijden

$$x_1 = \tfrac{1}{2}h_1(a_2+a_3)/S,\ x_2 = \tfrac{1}{2}h_2(a_3+a_1)/S,\ x_3 = \tfrac{1}{2}h_3(a_1+a_2)/S, \qquad (1.1)$$

waarin S de omtrek voorstelt.
Uit $x_i = \frac{1}{3}h_i$ $(i = 1, 2, 3)$ volgt $a_1 = a_2 = a_3$; G_1 valt dus alleen dan met G samen als de driehoek *gelijkzijdig* is.

2 Bij een *viervlak* kan men van *vier* zwaartepunten spreken: G_0 van de *hoekpunten*, G_1 van de *ribben*, G_2 van de *oppervlakte*, G_3 van de *inhoud*. Ook nu vallen de beide uitersten G_0 en G_3 samen in „het" zwaartepunt G. Zijn $a_{ij}(= a_{ji})$ de ribben en h_i de hoogten van $A_1A_2A_3A_4$ dan geldt voor de afstand x_1 van G_1 tot het vlak $A_2A_3A_4$:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}h_1(a_{12}+a_{13}+a_{14})/S, \qquad (2.1)$$

waarbij S de som der zes ribben is, terwijl de analoge uitdrukkingen gelden voor x_2, x_3 en x_4. Uit $x_1 = \frac{1}{4}h_1$, $x_2 = \frac{1}{4}h_2$ volgt zonder moeite $a_{12} = a_{34}$. De conclusie is, dat G_1 met G samenvalt alleen dan als elke ribbe gelijk is aan de overstaande.
Zijn F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ de oppervlakten van de zijvlakken van het viervlak en y_i de afstandscoördinaten van G_2, dan is:

$$y_1 = \tfrac{1}{3}h_1(F_2+F_3+F_4)/F, \qquad (2.2)$$

waarin F de totale oppervlakte voorstelt. Uit $y_i = \frac{1}{4}h_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ volgt dan $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$. In een gelijkvlakkig viervlak zijn overstaande ribben gelijk en omgekeerd. Wij hebben dus: *als G_1 met G samenvalt, dan ook G_2 en omgekeerd.* Dit doet zich alleen voor in *gelijkvlakkige viervlakken.*

3 Door Schuh[1] is indertijd de vraag opgeworpen of G_1 en G_2 onderling kunnen samenvallen zonder met G samen te vallen. Spoedig daarna werd zij door het geven van een voorbeeld bevestigend beantwoord[2]. Een eenvoudige karakteristiek van de viervlakken met deze eigenschap schijnt niet bekend te zijn en wordt in elk geval hier niet gegeven. Het bedoelde voorbeeld heeft betrekking op een viervlak met $a_{12} = a_{23} = a_{31} = a$, $a_{14} = a_{24} = a_{34} = b$, dus op een regelmatige driezijdige piramide. De punten G, G_1 en G_2 liggen alle op de hoogtelijn uit A_4, met lengte h. Is φ de basishoek van de gelijkbenige driehoek $A_4A_2A_3$ dan is $b = a/2\cos\varphi$. Als x en y de afstanden zijn van G_1 en G_2 tot het grondvlak, dan is:

$$x = \frac{3b \cdot \frac{1}{2}h}{3a+3b} = \frac{1}{2+4\cos\varphi}h, \tag{3.1}$$

$$y = \frac{\frac{3}{2}ab\sin\varphi \cdot \frac{1}{3}h}{\frac{3}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{\sin\varphi}{3\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi}h \tag{3.2}$$

Als $h \to 0$ dan $\varphi \to \frac{\pi}{6}$; voor een platte piramide is dus $x = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)h$ en $y = \frac{1}{6}h$ en bijgevolg $x > y$. Voor $h \to \infty$ is $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2}h$, $y = \frac{1}{3}h$ en eveneens $x > y$. Voor $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, het regelmatige viervlak, is $x = y = \frac{1}{4}h$; zodat het vermoeden opkomt, dat er nog een van $\frac{2\pi}{3}$ verschillende waarde van φ bestaat waarvoor G_1 en G_2 samenvallen. De berekening heeft een onverwacht gunstige afloop. Uit $x = y$ volgt:

$$\sin\varphi(4\cos\varphi - 1) = \sqrt{3}\cos\varphi \tag{3.3}$$

en daaruit na kwadrateren:

$$16\cos^4\varphi - 8\cos^3\varphi - 12\cos^2\varphi + 8\cos\varphi - 1 = 0, \tag{3.4}$$

of wel:

$$(2\cos\varphi - 1)(8\cos^3\varphi - 6\cos\varphi + 1) = 0. \tag{3.5}$$

Dit is wegens $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$,

$$(2\cos\varphi - 1)(\cos 3\varphi + \tfrac{1}{2}) = 0, \tag{3.6}$$

met, bij beperking tot scherpe hoeken, de oplossingen

$$\varphi = \tfrac{2}{9}\pi,\ \varphi = \tfrac{1}{3}\pi,\ \varphi = \tfrac{4}{9}\pi.$$

Daar $\cos\frac{4}{9}\pi < \frac{1}{4}$ hebben bij substitutie in (3.3) de beide leden verschillend teken zodat de betrokken oplossing bij het kwadrateren is ingeslopen.
Voor $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ vallen G_1 en G_2 met G samen. Wij krijgen dus: *in een regelmatige driezijdige piramide vallen G_1 en G_2 samen in een van G verschillend punt alleen dan als*:

$$\varphi = \tfrac{2}{9}\pi (= 40°).$$

De, van φ afhankelijke, onderlinge ligging van G_1, G_2 en G volgt gemakkelijk uit onze uitkomsten.

4 Wij breiden onze beschouwingen uit tot een simplex $A_1A_2A_3A_4A_5$ in de *vierdimensionale ruimte*. G_0 is het zwaartepunt der hoekpunten, G_1 dat der tien *ribben*, G_2 dat der tien *zijvlakken*, G_3 dat der vijf *zijruimten*, G_4 dat van het *volume*. G_0 en G_4 vallen samen in 'het' zwaartepunt G. Omtrent de onderlinge ligging der punten G_i kan men een rij van vragen stellen; wij beperken ons tot enkele voorbeelden.

Kan G_1 met G samenvallen? Met analoge notaties als boven krijgen wij voor de afstand x_1 van G_1 tot de zijruimte $A_2A_3A_4A_5$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}h_1(a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})/S \tag{4.1}$$

Uit $x_i = \frac{1}{5}h_i$ volgt dan

$$\begin{aligned} &a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} = a_{23}+a_{24}+a_{25}+a_{21} = \\ &= a_{34}+a_{35}+a_{31}+a_{32} = a_{45}+a_{41}+a_{42}+a_{43} = \\ &= a_{51}+a_{52}+a_{53}+a_{54}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ofwel:

G_1 valt met G samen alleen dan als de som der vier in een hoekpunt samenkomende ribben voor elk hoekpunt dezelfde is. Met de analoge redactie kan trouwens ook de conditie voor het samenvallen van G_1 en G voor het tetraëder worden uitgedrukt.

Is O_{ij} de oppervlakte van het zijvlak tegenover de ribbe a_{ij} en y_1 de afstand van G_2 tot $A_2A_3A_4A_5$, dan is

$$y_1 = \tfrac{1}{3}h_1(O_{23}+O_{24}+O_{25}+O_{34}+O_{35}+O_{45})/O, \tag{4.3}$$

als O de totale oppervlakte is. Dan volgt uit $y_i = \frac{1}{5}h_i$ dat:

$$\begin{aligned} &O_{12}+O_{13}+O_{14}+O_{15} = O_{23}+O_{24}+O_{25}+O_{21} = \\ &= O_{34}+O_{35}+O_{31}+O_{32} = O_{45}+O_{41}+O_{42}+O_{43} = \\ &= O_{51}+O_{52}+O_{53}+O_{54}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

ofwel:

G_2 valt alleen dan met G samen als de oppervlakten der vijf zijruimten gelijk aan elkaar zijn.

Zijn F_i de inhouden der zijruimten van het simplex, dan is de afstand z_1 van G_3 tot $A_2A_3A_4A_5$ gelijk aan

$$z_1 = \tfrac{1}{4}h_1(F_2+F_3+F_4+F_5)/F, \tag{4.5}$$

waarbij F de totale driedimensionale inhoud aangeeft. Uit $z_1 = \frac{1}{5}h_i(i = 1,..,5)$ volgt dan

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5, \tag{4.6}$$

ofwel:

G_3 valt met G alleen dan samen als de vijf zijruimten van het simplex gelijk van inhoud zijn. De conditie is analoog aan die voor het tetraëder. Maar (4.2) en (4.6) zijn niet, zoals in het driedimensionale geval, gelijkwaardig; dat kan uit voorbeelden blijken.

(Neem b.v. $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a,$

$a_{23} = a_{24} = a_{35} = a_{45} = b,$

$a_{25} = a_{34} = 3a-2b,$

dan is aan (4.2) voldaan maar de viervlakken $A_1A_2A_3A_4$ en $A_2A_3A_4A_5$ hebben niet dezelfde inhoud).

Het zou interessant kunnen zijn om na te gaan of tegelijkertijd aan (4.2), (4.4) en (4.6), of aan twee dezer betrekkingen voldaan kan zijn in een niet-regelmatig simplex.

5 Wij beschouwen tenslotte nog het speciale geval van de *regelmatige hyperpiramide*: $A_2A_3A_4A_5$ is een regelmatig tetraëder (met ribbe a en middelpunt M) terwijl A_1M (met lengte h) loodrecht op de grondruimte staat. Alle zwaartepunten liggen op A_1M.
Is nog M_1 het midden van A_2A_3 en M_2 het middelpunt van de driehoek $A_2A_3A_4$, dan is:

$$MA_2^2 = \tfrac{3}{8}a^2,\ MM_1^2 = \tfrac{1}{8}a^2,\ MM_2^2 = \tfrac{1}{24}a^2;$$

daaruit volgt $A_1A_2^2 = h^2+\frac{3}{8}a^2$, $A_1M_1^2 = h^2+\frac{1}{8}a^2$, $A_1M_2^2 = h^2+\frac{1}{24}a^2$.

Voor de afstanden x, y en z van respectievelijk G_1, G_2 en G_3 tot de grondruimte krijgen wij dan:

$$x = \{4\cdot\tfrac{1}{2}h\sqrt{h^2+\tfrac{3}{8}a^2}\}/\{4\sqrt{h^2+\tfrac{3}{8}a^2}+6a\} \tag{5.1}$$

$$y = \{6\cdot\tfrac{1}{3}h\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt{h^2+\tfrac{1}{8}a^2}\}/\{6\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt{h^2+\tfrac{1}{8}a^2}+4\cdot\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}\} \tag{5.2}$$

$$z = \{4\cdot\tfrac{1}{4}h\cdot\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{3}\sqrt{h^2+\tfrac{1}{24}a^2}\}/\{4\cdot\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{3}\sqrt{h^2+\tfrac{1}{24}a^2}+\tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}\} \tag{5.3}$$

Voor kleine waarde van h heeft men

$$x = \tfrac{1}{10}h(\sqrt{6}-1),\ y = \tfrac{1}{15}h(2\sqrt{6}-3),\ z = \tfrac{1}{8}h, \tag{5.4}$$

waaruit wegens $\frac{1}{5} > x > y > z$ voor een platte hyperpiramide, van de grondruimte afgerekend, de volgorde G_3, G_2, G_1, G blijkt. Voor grote waarde van h heeft men

$$x = \tfrac{1}{2}h, \qquad y = \tfrac{1}{3}h \qquad \text{en} \qquad z = \tfrac{1}{4}h \qquad \text{en dus}$$

is in dezelfde zin geteld de volgorde G, G_3, G_2, G_1. Er vindt op de hoogtelijn bij toenemende h een spannende wedstrijd plaats; na de start ligt G voorop, maar voor $h = \frac{1}{4}a\sqrt{10}$ (het regelmatige simplex) wordt G gelijktijdig door de

andere deelnemers ingehaald en dit punt blijft verder achter. De overige drie gaan tenslotte op de finish af in dezelfde volgorde als die na de start gold. Tijdens de race (en wel in de eerste periode, voor $h < \frac{1}{4}a\sqrt{10}$) vinden merkwaardigerwijze volgordeveranderingen voor G_1, G_2 en G_3 plaats die het beeld van het veld wijzigen. G_3 haalt G_2 in als $z = y$, G_2 en G_1 vallen samen als $y = x$, G_3 en G_1 als $z = x$. Deze drie irrationale vergelijkingen voor h^2 leiden na kwadrateren tot vergelijkingen van de vierde graad voor h^2, die elk behalve $h^2 = \frac{5}{8}a^2$ (het regelmatige simplex) nog één bruikbare wortel hebben. Wij laten de nadere discussie aan de lezer, die desgewenst het verloop met grafieken voor x, y en z als functies van h kan illustreren. Als een toelichting beschouwen we de waarde $h^2 = \frac{1}{8}a^2$ en vinden dan:

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{34}(3\sqrt{2}-1), \qquad \frac{y}{h} = \frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3), \qquad \frac{z}{h} = \frac{1}{6}, \tag{5.5}$$

waaruit volgt $x < y < z$. Voor genoemde waarde van h is dus G_1 door G_2 en G_3 en ook G_2 door G_3 ingehaald, zodat de volgorde G_1, G_2, G_3, G is ontstaan die tot $h = \frac{1}{4}a\sqrt{10}$ gehandhaafd blijft.

[1] F. Schuh, Iets over het zwaartepunt van een driehoek en een viervlak als punt-, draad-, karton- en gipsmodel, Christiaan Huygens, 8 (1929–30), 318–320; 9 (1930–31), 1–6.

[4] O. Bottema, Het zwaartepunt van een regelmatige driezijdige piramide als draad- en kartonmodel. Christiaan Huygens 9 (1930–31), 96–101.

Calcolo geometrico, een belangwekkend boek van G. Peano

PROF. DR. A. F. MONNA
Utrecht

Bij een onderzoek naar de ontwikkelingsgeschiedenis van de theorie van de lineaire- of vectorruimten stuitte ik op een door G. Peano in 1888 geschreven boek waarvan de preciese titel luidt: 'Calcolo geometrico secondo l' Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva'. Het is uitgegeven in Turijn en in het Italiaans geschreven. Het schijnt in geen der Nederlandse bibliotheken aanwezig te zijn; het exemplaar waarvan ik kennis heb kunnen nemen werd mij door bemiddeling van Prof. Barlotti te leen gestuurd door de universiteit van Perugia.
Waarom is er aanleiding om in dit tijdschrift over dit boek te schrijven? Het is hier niet in de eerste plaats interessant wegens het hoofdobject: de Calcolo Geometrico. De calcolo, die onder meer tot Grassmann (1844) teruggaat, betreft, zoals Peano zegt, een calculus met meetkundige objecten, analoog aan de operaties in de algebra met getallen. Op dit punt staan er interessante zaken in dit in 1888 geschreven boek. Zo geeft Peano hierin een definitie van het begrip lineaire ruimte, vrijwel op de wijze zoals wij dat nu doen. Maar daar ga ik hier niet op in. Wat mij – behalve dit punt – trof in verband met de huidige schoolwiskunde was het inleidende hoofdstuk dat, zoals uit de titel blijkt, gaat over logische operaties.
Over dit hoofdstuk zou men kunnen rapporteren onder het motto: onze moderne schoolwiskunde is al oud. Ik stel mij voor dit toe te lichten aan een aantal passages uit dit merkwaardige boek. Men vergelijke ze met onze 'gemoderniseerde wiskunde'.

In het inleidende hoofdstuk begint Peano met de theorie der verzamelingen. Hij onderstelt te zijn gegeven een systeem van dingen (Peano zegt 'enti') en hij beschouwt deelverzamelingen (klassen) A, B,... in dit systeem. Hij noemt voorbeelden zoals (in Peano's woorden) de klasse van de rationale getallen in het systeem van de reële getallen. Dan spreekt hij af dat, als a een getal is, de klasse van de getallen die groter zijn dan a te zullen aangeven door $(> a)$
Er volgen verzamelingstheoretische definities.
1 Door de schrijfwijze $A = B$ wordt de identiteit van de klasse A en B aangegeven, waarmee wordt bedoeld dat elk element van A behoort tot B en omgekeerd. De propositie $A = B$ noemt Peano een logische vergelijking ('equazione logica').

> 'Colla scrittura $A = B$ intenderemo di affermare l'indentità delle due classi A en B, vale a dire che ogni ente A è pure B, e viceversa'.

Voorbeelden: 'numeri pari' = 'multiplo di 2'.

'numero razionale' = 'numero che si può sviluppare in frazione continua finita' [getallen die in een eindige kettingbreuk kunnen worden ontwikkeld].

2 De doorsnede van de verzamelingen A, B, C ... wordt nauwkeurig ingevoerd. Zij wordt gedefinieerd als de maximale klasse die bevat is in A, B, C, ... ofwel de klasse van alle dingen die zowel tot A, tot B enz. behoren.

' ... la massima classe continuta nelle classi A, B, C, ... ossia la classe formata da tutti gli enti che sono ad un tempo A e B e C, ecc'

Peano noteert deze doorsnede met $A \cap B \cap C \cap \ldots$ Hij merkt op dat de operatie aangegeven door het teken van $\cap$ correspondeert met de conjunctie uit de logica. Hij spreekt dan van de 'logische vermenigvuldiging' of van een logisch produkt waarvoor hij ook de notatie AB gebruikt.

Voorbeelden: 'multiplo di 6' = 'multiplo di 2' $\cap$ 'multiplo di 3'.
'$(> 1) \cap (< 2)$' = het systeem van de getallen tussen 1 en 2.

3 De vereniging van verzamelingen, met het symbool $\cup$, wordt analoog ingevoerd: de vereniging van A, B,... wordt gedefinieerd als de minimale klasse die A, B,... bevat. Peano noteert $A \cap B \cap C$..... .De operatie $\cup$ correspondeert met de logische disjunctie.

Voorbeeld: '$(< 1) \cup (>2)$' = 'getallen die niet tussen 1 en 2 liggen en verschillend van 1 en 2 zijn'.

Ik moet overigens opmerken dat Peano wel de verzamelingen $A \cup B$ en $A \cap B$ definieert, maar daarvoor niet de woorden vereniging en doorsnede gebruikt.

4 Het complement $-A$ of $\bar{A}$ van een verzameling, corresponderend met de negatie, wordt ingevoerd; ik laat zijn formulering nu maar achterwege.

5 Peano beschouwt de klasse van alle elementen van het systeem en hij noteert die door ●.

'... considerare come classe l'insieme (verzameling) di tutti gli enti del sistema, che si indicherà col segno ●, e si leggera *tutto*;

Daarnaast voert hij ook de lege verzameling in (zonder overigens het woord leeg te gebruiken); het is de verzameling die geen enkel element van het systeem bevat. Hij voert hiervoor de notatie O in.

'...; bisogne pure considerare come classe la mancanza d'ogni ente, che si indicherà col segno O,...'.

Voorbeelden: $(> 1) \cup (< 2)$ = ●,
$(< 1) \cap (> 2)$ = O.
'geheel' $\cup$ 'gebroken' $\cup$ 'irrationaal' = ●.

In dit boek van 1888 worden, naar ik aanneem, voor de eerste keer de symbolen $\cup$

en $\cap$ geïntroduceerd. Peano merkt op, dat hij deze symbolen prefereert boven de door E. Schröder (Der Operationskreis des Logikkalkuls, Leipzig 1877) in de logica gebruikte symbolen x (voor de conjunctie of doorsnede) en + (voor de disjunctie of vereniging) teneinde verwarring met de overeenkomstige symbolen in de wiskunde te voorkomen. Het is merkwaardig te constateren dat de symbolen $\cup$ en $\cap$ pas na tientallen jaren door de mathematici in de wiskunde zijn overgenomen. Tot ver in deze eeuw gebruikten de wiskundigen het teken x (of een punt) voor de doorsnede en + voor de vereniging. Pas na de tweede wereldoorlog kwamen $\cap$ en $\cup$ in gebruik. Het ware interessant te weten wat de oorzaak van deze vertraagde ingebruikneming is.

Bezien vanuit het oogpunt van ons streven naar de modernisering van het onderwijs in de wiskunde is bijzonder belangwekkend de paragraaf over proposities. Er zijn bladzijden die men ook in onze huidige schoolboeken zou kunnen aantreffen.

Peano onderscheidt categorische en voorwaardelijke ('condizionale') proposities. Een categorische propositie drukt een relatie uit waarin alle elementen ('enti') bepaald zijn. Een voorwaardelijke propositie bevat onbepaalde (variabele) elementen. De conditie die door een dergelijke propositie wordt uitgedrukt kan voor bepaalde elementen waar zijn, voor andere onwaar.

Is α een voorwaardelijke propositie die de onbepaalde x bevat, dan geeft Peano met $x:\alpha$ aan de klasse bestaande uit alle elementen waarvoor α waar is. Hij geeft analoge notaties voor het geval er meer onbepaalden zijn.

Peano geeft dan vele voorbeelden, waarvan ik er slechts enkele noem.

Laten $x,y,\ldots$ getallen zijn en $f,\phi,\ldots$ numerieke functies.

(1) x: $[f(x) = 0]$ stelt voor de klasse van de getallen x waarvoor $f(x)$ nul is.

(2) x: $[f(x) = 0]$ $\cap$ x : $[\phi(x)]$ stelt voor de gemeenschappelijke wortels van de vergelijkingen $f(x) = 0$ en $\phi(x) = 0$.

(3) x: $[f(x) = 0] = \emptyset$ betekent: $f(x) = 0$ is een identiteit met betrekking tot x.

(4) (x,y) : $[f(x,y) = 0]$ stelt voor de verzameling van de paren van x en y waarvoor $f(x,y) = 0$.

Ik volsta hiermee; Peano geeft talloze variaties.

Ter vereenvoudiging spreekt Peano af de notatie $(x,y,\ldots)$: te zullen weglaten in die gevallen waarin het ondubbelzinnig duidelijk is welke elementen als variabel worden beschouwd.

Zijn α en ß voorwaardelijke proposities, dan geeft hij met $\alpha <$ ß aan dat α als consequentie ß heeft: 'se è vera la α è pure vera la ß'. Dit is dus de implicatie.

De betekenis van $\alpha \cup$ ß en $\alpha \cap$ ß is evident.

Neemt men deze regels in acht, dan zou de volgende passage, die ik letterlijk overneem, vrijwel kunnen worden aangetroffen in onze huidige boeken.

Esempi. Il lettore, per abituarsi ne'segni introdotti, può interpretare in linguaggio ordinario le seguenti proposizioni, in cui *a, b,* ... *x, y,* ... rappresentano numeri reali e finiti:

$$(a < b) = (b > a); -(a < b) = (a \geq b); -(a = b) = (a \gtrless b);$$
$$(a = b) = (a + c = b + c);$$
$$(a = b) < (ac = bc); (ac = bc) = (a = b) \cup (c = 0);$$
$$(ac = bc) \cap -(c = 0) < (a = b).$$
$$(a = b) < (a^2 = b^2); (a^2 = b^2) = (a = b) \cup (a = -b).$$
$$(ax + b = a'x + b') = [(a - a')x = b' - b].$$
$$(x + y = a) \cap (x - y = b) = (2x = a + b) \cap (2y = a - b).$$
$$(xy = 0) = (x = 0) \cup (y = 0); (x^2 + y^2 = 0) = (x = 0) \cap (y = 0).$$
$$(x^2 - 3x + 2 > 0) = (x < 1) \cup (x > 2).$$
$$-(x^2 - 3x + 2 > 0) = -(x < 1) \cap -(x > 2).$$
$$[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2] = \bullet; (x^2 + y^2 + 1 = 0) = \bigcirc.$$
$$[x: (ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c') = \bullet] =$$
$$= (a = a') \cap (b = b') \cap (c = c')$$

(vale a dire: affinchè l'eguaglianza $ax^2 + \ldots = a'x^2 + \ldots$ sia soddisfatta per ogni valore di x, è necessario e sufficiente che sia ad un tempo $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$).

$$\left\{ x: \left[\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} \right] = \bullet \right\} = (a = 1) \cap (b = -1).$$

$$[x: (x^2 + y^2 = 1) = \bigcirc] = (y < -1) \cup (y > +1)$$

(cioè: affinchè l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ non abbia radici reali in x è necessario e sufficiente che o y sia minore di -1, ovvero y sia maggiore di 1).

Met een vertraging van 80 jaar voor ogen, kan men, dunkt mij, niet veel anders concluderen dan dat de invloed van dit boek op het onderwijs gering is geweest, al moet men natuurlijk in aanmerking nemen dat het niet werd geschreven met het oog op onderwijsmodernisering. Maar de invloed op de wiskunde is al evenmin groot geweest. Het boek werd weinig geciteerd en Peano's moderne definitie van het begrip lineaire ruimte werd niet op de juiste waarde geschat. Het heeft nog jaren geduurd voor dit begrip gemeengoed was geworden. Misschien is het feit dat het boek in het Italiaans werd geschreven niet vreemd aan deze wel bijzonder lange vertraging.

Pythagoras rechtstreeks

G.R. VELDKAMP
Nuenen

Van Nieuwkasteele heeft met eenvoudige hulpmiddelen uit de lineaire algebra de pythagoreïsche driehoeken bepaald waarvan de beide rechthoekszijden één eenheid van lengte verschillen. Hij gaat uit van de bekende algemene gedaante $(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$ van een pythagoreïsch drietal.[1] De bedoeling van dit stukje is, te laten zien dat men met zijn methode, de vraag ook *rechtstreeks* kan behandelen.
Zij $z \in \mathbb{N}$ de lengte van de kortste rechthoekszijde en $y \in \mathbb{N}$ die van de schuine zijde van zulk een driehoek. Dan gaat het om alle oplossingen van de diophantische vergelijking:

$$z^2 + (z+1)^2 = y^2 \, , (z,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad (1)$$

Stellen we $2z + 1 = x$ dan komt dit neer op:

$$x^2 - 2y^2 = -1 \, , (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, x \geqq 3. \qquad (2)$$

Uit de identiteit $(3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 = x^2 - 2y^2$ volgt:
is (x,y) *een oplossing van* (2) *dan is ook* $(3x+4y, 2x+3y)$ *een oplossing.* We stellen de matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ voor door B en merken op dat – afgezien van de voorwaarde $x \geqq 3$ – het paar (1,1) een oplossing is van (2). Dan is dus

$$(x_n, y_n) = (1,1)B^n, \; n \in \mathbb{N}, \qquad (3)$$

een oneindige verzameling van oplossingen van (2). Voor deze oplossingen geldt ten duidelijkste: $x_n < x_{n+1}$ en $y_n < y_{n+1}$ Verder zien we direct het volgende: *zijn* (x',y') *en* (x'',y'') *oplossingen van* (2) *dan volgt uit* $x' < x''$ *dat* $y' < y''$. Kortheidshalve schrijven we dan $(x',y') \lhd (x'',y'')$. Hieruit volgt zonder enige moeite: $(x',y')B \lhd (x'',y'')B$.

Zij nu (x^*, y^*) een oplossing van (2). Dan is er een $k \in \mathbb{N}$, zodanig dat

$$(1,1)B^{k-1} \lhd (x^*, y^*) \unlhd (1,1)B^k.$$

Dus is

$$(1,1) \lhd (x^*, y^*)B^{1-k} \unlhd (1,1)B = (7,5):$$

Bijgevolg is $(x^*,y^*)B^{1-k} = (\bar{x},\bar{y})$ een oplossing van (2) waarvoor geldt: $3 \leqslant \bar{x} \leqslant 7$. Voor de onbekende x (en trouwens ook voor y) komen alleen *oneven* getallen in aanmerking. Daar $x = 3$ of 5 geen gehele waarde van y levert, is dus $\bar{x} = 7$, zodat $(x^*,y^*) = (1,1)B^k$, $(k \in \mathbb{N})$.
De door (3) *aangewezen deelverzameling van* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *is dus de verzameling van alle oplossingen van* (2).
Nu dit bewezen is, kan men x_n en y_n met gebruikmaking van de eigenwaarden en eigenvectoren van B gemakkelijk in n uitdrukken; ook z en $z + 1$ zijn dan te vinden.

[1] C.P. van Nieuwkasteele, Pythagoras met matrices, Euclides *46*, (1970-'71), 344-348.

Pythagoras met een nevenvoorwaarde

R.J. STROEKER
Manchester

1. Onlangs verscheen in dit maandblad een artikel [1], waarin het volgende diophantische probleem wordt gesteld. Men vraagt algemene formules op te stellen voor de zijden van een rechthoekige driehoek en wel zodanig dat het absolute verschil van de rechthoekszijden gelijk is aan 2. Dus gevraagd wordt naar alle tripels van natuurlijke getallen (a,b,c) met de eigenschappen

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ en } |a - b| = 2.$$

Bij de oplossing maakt de auteur van bovengenoemd artikel gebruik van matrices. Alhoewel elegant, de gekozen methode verschilt in wezen niet van de klassieke 'descent' methode, die wij al bij Fermat aantreffen [2].
Het probleem komt in essentie neer op de vraag of de oplossingen (u,v) van de diophantische vergelijking

$$u^2 - v^2 - 2uv = \pm 1 \text{ , } u > v \geqslant 0 \qquad (1)$$

in algemene vorm gevonden kunnen worden.
Daarmee is het probleem eigenlijk al opgelost. Immers (1) kan geschreven worden als een vergelijking van Pell

$$(u - v)^2 - 2v^2 = \pm 1 \text{ ,}$$

waarvan de oplossing algemeen bekend is [3].
Maar laten wij eens nader bekijken hoe 'la descente infinie ou indéfinie', zoals Fermat zijn methode noemde, in ons geval werkt. (Natuurlijk kan deze werkwijze ook aangewend worden bij het oplossen van de Pellse vergelijking).
Uitgaande van een paar (u,v) dat voldoet aan (1), terwijl bovendien $u \geqslant 2$ en $v \geqslant 1$, een kleiner paar (u',v') wordt gevonden door te stellen

$$u' = v \text{ en } v' = u - 2v. \qquad (2)$$

Het is niet moeilijk in te zien dat dit nieuwe paar inderdaad een oplossing van (1) is met de eigenschappen:

$$1 \leqslant u' < u \text{ en } 0 \leqslant v' < v \text{ .}$$

Immers $u' \geqslant u$ impliceert $v \geqslant u$ en $v' \geqslant v$ impliceert $u'v' \geqslant 1$ terwijl $1 \leqslant u'^2 \leqslant v'^2$ zodat $u'^2 - v'^2 - 2u'v' \leqslant -2$ en dit is in tegenspraak met (1). Vervolgens uit $v' \leqslant -1$ volgt $u'v' \leqslant -1$ terwijl $u'^2 - v'^2 = (u' - v')(u - u') > 0$ en dus $u'^2 - v'^2 - 2u'v' > 2$, opnieuw een tegenspraak. Het behoeft geen betoog dat voor een willekeurige oplossing (u,v) van (1) het proces dat door (2) gegeven wordt na eindig veel toepassingen afbreekt bij $(u_0,v_0) = (1,0)$, de kleinste oplossing van (1). Als het benodigde aantal stappen met n wordt aangegeven, dan is de rij $u_0, u_1, u_2, .., u_n, ...$ de Lucasrij

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}, n = 1,2,... \tag{3}$$

Dit is een direct gevolg van (2).
De algemene term u_n kan nu onmiddellijk gevonden worden met behulp van de theorie der differentievergelijkingen [4]:

$$u_n = \frac{\lambda^n - (-\lambda^{-1})^n}{\lambda + \lambda^{-1}}$$

Hier zijn λ en $-\lambda^{-1}$ de wortels van de vergelijking $x^2 - 2x - 1 = 0$ $(\lambda > 1)$.

2. Het probleem laat zich gemakkelijk generalizeren. Laat P een vast geheel getal zijn, ongelijk aan nul. We vragen nu naar alle tripels (a,b,c) die het volgende diophantische systeem oplossen:

$$a^2 + b^2 = c^2, \; a - b = P, \; a,b,c \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

We mogen veronderstellen, zonder de algemeenheid te schaden, dat a,b en c positief en relatief priem zijn. Het is bekend dat we dan mogen schrijven

$$\begin{aligned} a, b &= 2uv \\ b, a &= u^2 - v^2 \qquad\qquad (u,v) = 1, \; u > v > 0, \\ c &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

en verder

$$(u - v)^2 - 2v^2 = \pm P. \tag{5}$$

Laten we ons eerst eens afvragen of er inderdaad wel oplossingen van (4) zijn. Allereerst merken we op dat P niet even kan zijn. Immers, waren a en b beide oneven, dan zou gelden $c \equiv 2 \pmod 4$, een duidelijke tegenspraak. Verder impliceert (5) dat 2 een kwadratisch residue van elke priemdeler p van P is, en dus geldt voor zo'n p, $p^2 \equiv 1 \pmod{16}$, waaruit we concluderen $p \equiv \pm 1 \pmod 8$. Nu is de ring $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Z}\}$ euclidisch en dus een factorontbindingsring [3]. Het is dan gemakkelijk na te gaan dat elk (natuurlijk) priemgetal van de vorm $\pm 1 \pmod 8$ in de gedaante $\pm(x^2 - 2y^2)$ $x,y \in \mathbb{Z}$ geschreven kan worden. We zullen daarom van nu af aan veronderstellen dat elke priemdeler van P van de vorm $\pm 1 \pmod 8$ is.

We ontbinden het linkerlid van (5) in $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$. Dit geeft

$$(u - v + v\sqrt{2})(u - v - v\sqrt{2}) = \pm P. \tag{6}$$

Nu zijn beide factoren in het linkerlid van (6) relatief priem in $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$, omdat u en v dat zijn in $\mathbb{Z}$. Verder is $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ een fundamentele eenheid van de ring $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ en dus kunnen alle oplossingen van (6) gevonden worden uit

$$u - v + v\sqrt{2} = \lambda^k . \alpha \tag{7}$$

$$\text{en } u - v - v\sqrt{2} = (-\lambda^{-1})^k . \alpha' ,$$

waarbij k een geheel getal is en α tot een eindige deelverzameling D van $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ behoort (α' is de geconjugeerde van α in $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ en $\alpha\alpha' = \pm P$).
Uit het feit dat zowel $u - v$ als v positief is volgt dat wij bij elke gekozen α een geheel getal n_α kunnen vinden zodat $k \geqslant n_\alpha$. Tevens kan α steeds zó gekozen worden dat $n_\alpha = 1$. Uit (7) verkrijgen wij nu de volgende formules voor v en $u - v$

$$v = \frac{\alpha\lambda^k - \alpha'(-\lambda^{-1})^k}{\lambda + \lambda^{-1}}$$

$$u - v = \frac{\alpha\lambda^k + \alpha'(-\lambda^{-1})^k}{\lambda - \lambda^{-1}} \tag{8}$$

Ter overvloede merken wij nog op dat als wij in (8) $u = u_k$ en $v = v_k$ stellen, het op eenvoudige wijze is af te leiden dat

$$u_{k+1} = 2u_k + u_{k-1} \text{ en } v_{k+1} = u_k . \tag{9}$$

Dientengevolge wordt bij elke toegelaten waarde van α een Lucasrij $(u_k)_{k \geqslant n_\alpha}$ verkregen. Het zal duidelijk zijn dat bij verschillende keuzen van α de beginvoorwaarden van de corresponderende rijen in het algemeen zullen verschillen.
Tenslotte willen wij een en ander verduidelijken aan de hand van een voorbeeld.
Op grond van het voorgaande is het duidelijk dat de gevallen $P = 1,2,3,4,5$ en 6 in wezen niet verschillen.
Laten wij het geval $P = 7$ eens nader beschouwen.
De getallen $\pi_1 = 1 + 2\sqrt{2}$ en $\pi_2 = -1 + 2\sqrt{2}$ zijn priemgetallen van $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ en $\pi_1 . \pi_2 = 7$. Elke ontbinding van ± 7 in $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ is dus van de vorm $\pm \lambda^n \cdot \pi_1 \cdot \pi_2$, met het gevolg dat we $D = \{\pi_1, \pi_2\}$ mogen kiezen.
Met behulp van (7) en (9) verkrijgen wij nu twee Lucasrijen $u_1, u_2, \ldots$ van het type (9) met beginvoorwaarden: $u_1 = 3$, $u_2 = 8$ in geval $\pi_1 = \alpha$ en $u_1 = 4$, $u_2 = 9$ als $\pi_2 = \alpha$.
De twee kleinste rechthoekige driehoeken (a,b,c) die aan de nevenvoorwaarde $|a - b| = 7$ voldoen zijn dan (5,12,13) en (8,15,17).

Verwijzingen:

[1] C.P. van Nieuwkasteele – Pythagoras met matrices. Euclides (46), pp. 344-349.
[2] P. de Fermat – Oeuvres I & II. Uitg. Tannery & Henry, Parijs 1894.
Zie bijv. Fermat's brief aan Carcavi (aug. 1659), II p. 431.
[3] Hardy & Wright – The theory of numbers. Clarendon (Oxf.)
[4] N.G. de Bruijn – Bekn. Leerboek der Diff. en Integr. rek. 2de dr. 1958 (Amsterdam).

Korrel CLXXVIII

Onderwijshervorming in België

Ook in België is men thans bezig het gehele onderwijs te hervormen. Hieronder volgen de consequenties, die de hervorming heeft voor het wiskunde-onderwijs, en wel voor het Franstalige deel van België.
Het middelbaar onderwijs is in drie perioden verdeeld:
a. een degré d'observation;
b. een degré d'orientation;
c. een degré de détermination.
Elk van deze perioden beslaat twee jaar.
In elk van de beide jaren van de eerste periode krijgt ieder 5 uur wiskunde. Van deze 5 uur mag 1 uur de klas gesplitst worden in twee halve klassen. Dit kan van belang zijn, als men b.v. afzonderlijk met meer en met minder begaafde leerlingen een les wil besteden. Verder zijn er naast deze 5 uur elk jaar 2 uur beschikbaar voor het bijwerken van achterblijvende leerlingen.
In de tweede periode krijgt ieder elk jaar 4 uur wiskunde, waarvan weer 1 uur gesplitst mag worden in halve klassen. Daarboven zijn elk jaar nog 2 uur beschikbaar voor het afwerken van een extra programma met leerlingen, die speciale belangstelling voor de wiskunde hebben.
In de derde periode is wiskunde geen verplicht vak meer. Er ligt nog niet vast, hoeveel uren per week leerlingen, die wel wiskunde begeren, zullen krijgen. De bedoeling is, dat dit aantal groot kan zijn. Het schijnt zelfs, dat het tot 11 zal kunnen oplopen.
De urentabellen voor het Nederlandstalige deel heb ik niet gezien. Ze wijken echter niet aanmerkelijk af van de bovengenoemde.

P.G.J. Vredenduin
Oosterbeek

Korrel CLXXIX

Wiskunde-onderwijs in Frankrijk

Op 18 november 1971 hield Prof. Dr. A. Lichnerowicz uit Parijs een voordracht in Utrecht in het gebouw van het I.O.W.O. over het wiskunde-onderwijs in Frankrijk. Enkele punten uit deze voordracht, die van belang zijn voor de lezers van Euclides, volgen hier.
In november 1967 werd een ministeriële commissie ingesteld om te komen tot vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. Voorzitter van de commissie werd Prof. Lichnerowicz. Tot de leden behoorden hoogleraren (o.a. de professoren Choquet en Revuz), wiskunde-inspecteurs, leraren van het secundair onderwijs en ook psychologen, fysici en personen die wiskunde toepassen. De gevolgde strategie vertoont veel overeenkomst met de in ons land gevolgde werkwijze: herscholing leraren, experimenteren met nieuwe programma's en experimentele examens. In oktober werden Instituts de recherche sur l'éducation mathématique in het leven geroepen. Deze IREM's zijn onderdelen van universiteiten. Leraren worden eraan verbonden en hebben er een halve weektaak; de andere helft van hun taak blijft schoolonderwijs. Men is begonnen met drie dergelijke instituten; hun aantal is later uitgebreid.
Men kon gebruik maken van reeds jarenlange incidentele pogingen met modernisering van het wiskunde-onderwijs te experimenteren. Mede daardoor kon men snel tot resultaten komen. Reeds in oktober 1969 is men begonnen officieel een nieuw programma algemeen in te voeren.
Het Franse secundaire onderwijs bestaat uit twee cycles. De eerste cycle (onderbouw) bestaat uit de klassen 6, 5, 4, 3 en wordt afgesloten door een examen, dat brevet heet. Daarna kan men kiezen tussen een soort A-afdeling (litéraire) en een B-afdeling (scientifique), die bestaan uit drie klassen, namelijk de klassen 2, 1 en T (terminal). Aan het eind van de tweede cycle doet men het baccalauréat. Het nieuwe programma is van onderen af aan ingevoerd, d.w.z. in 1969 in klasse 6, in 1970 in klasse 5, enz. Tegelijk heeft men echter ook in de bovenbouw in 1969 een nieuw programma ingevoerd in klasse 2, in 1970 in klasse 1 en in 1971 in klasse T. Uiteraard is dit nieuwe programma voor de bovenbouw provisorisch en zal het eerst vanaf 1973 door een definitief kunnen worden vervangen.
Enkele dingen uit het nieuwe programma zijn mij opgevallen. Het meetkunde-onderwijs in de klassen 6 en 5 wordt gekarakteriseerd als introduction physique à la géométrie. In de klasse 5 bestaat deze inleiding uit een inleiding tot de meetkunde van de ruimte. Men moet er hierbij wel aan denken, dat de Franse basisschool slechts vijf leerjaren omvat, zodat de leerlingen in klasse 6 een jaar

jonger zijn dan bij ons in klasse 1. Na deze intuïtieve inleiding van twee jaar volgt in het derde en vierde leerjaar een axiomatisch-deductieve opbouw van de meetkunde, waarbij men uitgaat van een betrekkelijk gering aantal axioma's. Genoemd werden: door twee punten gaat precies één lijn, het axioma van Euclides, het axioma van Thales (dat betrekking heeft op het gelijk blijven van verhoudingen bij parallelprojectie), een orthogonaliteitsaxioma, metrische axioma's. In de vierde klasse wordt de affiene meetkunde beoefend, in de derde wordt eerst gebruik gemaakt van de axioma's betreffende orthogonaliteit en metriek en ontstaat zo de metrische meetkunde. Hoofdpunten van het programma in de bovenbouw zijn: lineaire algebra, analyse (inclusief een verantwoorde theorie van het reële getal) en waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Ook aan computerwiskunde wil men aandacht besteden.
Natuurlijk is van belang het aantal uren, dat aan wiskunde besteed wordt. Dit is
in elk van de klassen van de onderbouw: 4 uur
in de B-afdeling van de bovenbouw: resp. 6, 6, 8 uur
in de A-afdeling van de bovenbouw: resp. 4, 4, 5 uur.
Klassen in de onderbouw, die meer dan 24 leerlingen bevatten, worden voor het vak wiskunde gesplitst.
Nog even narekenen en niet schrikken: elke 'B-leerling' krijgt 36 uur wiskunde en elke 'A-leerling' 29 uur. Leerlingen zonder wiskunde op het eindexamen bestaan niet.
Het aantal lesuren van een leraar bedraagt 18 per week.

P.G.J. Vredenduin
Oosterbeek

Korrel CLXXX

Associativiteit.

Ontwerp men een Cayley-tabel van een structuur bestaande uit een eindig aantal elementen, dan is het nodig, wil de structuur een groep zijn, dat elke rij en elke kolom alle elementen van de beschouwde verzameling bevat en er bovendien een eenheidselement is. Dit garandeert de geslotenheid en het bestaan van de inversen.

Wenst men van een element, niet van de orde 1 of 2, de orde te bepalen, dan is daarvoor in het algemeen de associativiteit vereist.

Immers a^4 heeft alleen zin als $a^2(aa) = (a^2 a)\,a$

Kan men de associativiteit uit de tabel aflezen?

Of liever — daar is in het algemeen minder geduld voor nodig — de niet-associativiteit?

Dit is eenvoudig na te gaan.

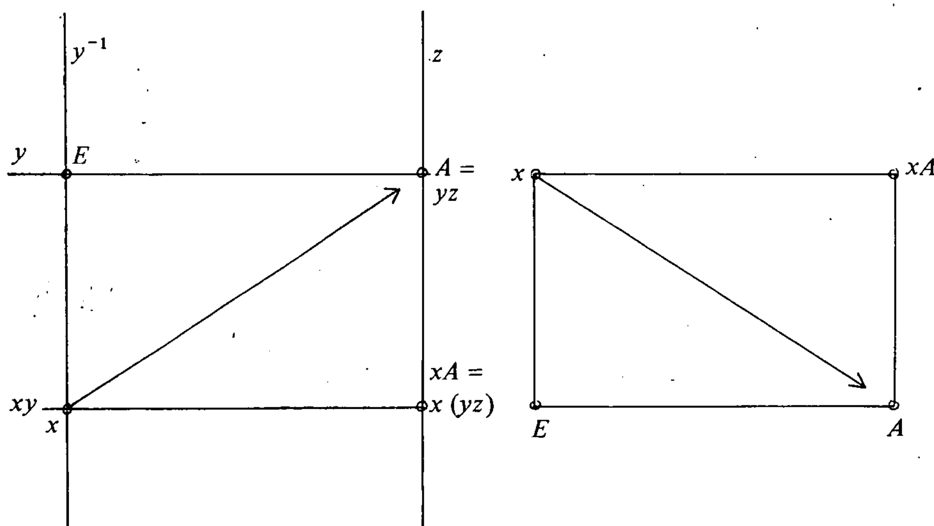
Nemen we $(xy)\,z = x(yz)$.

Kies in de rij van het element y het eenheidselement E.

In deze rij vindt men dan in de kolom van z het element yz.

In de kolom van het element y^{-1} vindt men het element x.

Indien nu in het vierde hoekpunt het element $x(yz)$ optreedt is de associativiteit voor dit drietal verzekerd. Nu blijkt immers: $(xy)\,z = x(yz)$. Die controle is eenvoudig uit te voeren.



·	E	a	b	c	d	e
E	E	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e	E
b	b	E	a	e	c	d
c	c	e	d	b	E	a
d	d	c	e	E	a	b
e	e	d	E	a	b	c

niet-associatief, $ba \neq c$

·	E	a	b	c	d	e
E	E	a	b	c	d	e
a	a	E	d	b	e	c
b	b	c	E	e	a	d
c	c	d	e	E	b	a
d	d	e	c	a	E	b
e	e	b	a	d	c	E

niet-associatief, $cd \neq E$

alle elementen
van de orde 2
Aan Lagrange
is dus voldaan.

	E	a	a^2	b	c	d
E	E	a	a^2	b	c	d
a	a	a^2	E	d	b	c
a^2	a^2	E	a	c	d	b
b	b	d	c	E	a	a^2
c	c	b	d	a^2	E	a
d	d	c	b	a	a^2	E

niet-associatief, $cd \neq E$

twee elementen van de orde 3,
drie elementen van de orde 2,
aan Lagrange is voldaan.

W. Burgers
Wassenaar

Boekbespreking

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Volume II, John Wiley and Sons, Inc. New York-London-Torento, second edition 1971, XV + 669p,£ 7,–.

Een uitgebreide recensie van de eerste editie kan men vinden in alle tijdschriften op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek. Ik zal hier volstaan met een globale bespreking.
Het eerste deel (waarvan de eerste druk twintig jaar geleden verscheen en waarvan inmiddels een derde editie bestaat) neemt een belangrijke plaats in tussen de boeken op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening. Het behandelt voornamelijk diskreet verdeelde stochastische grootheden en de toepassingen hiervan. Het niveau van de gebruikte wiskunde ligt hierdoor niet hoog. Vooral de eerste hoofdstukken over kombinatoriek en stochastische wandeling (random walk) geven de lezer een prettig leesbare, niet moeilijke, inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening.
Het tweede deel beperkt zich niet tot diskrete verdelingen. Er wordt meer wiskunde voor-kennis vereist (kennis van maattheorie is wenselijk, zij het niet noodzakelijk). In deze tweede editie zijn veel drukfouten en onjuistheden in enkele bewijzen uit de eerste editie verbeterd. Verder zijn enkele paragrafen in het geheel herschreven en enige nieuwe resultaten, welke zijn gepubliceerd na het verschijnen van de eerste druk, toegevoegd.

J. L. Mijnheer

Jean-Louis Krivine, Introduction to Axiomatic Set Theory, Synthese Library, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1971, VII + 98 blz., f 28,–.

Veel collega's zullen de behoefte gevoelen exact voorgelicht te worden omtrent de betekenis van de term 'verzameling'. In dit boek vindt men een axiomatische behandeling van de verzamelingenleer, op de basis van de oorspronkelijke axiomatiek van Zermelo en van Fraenkel, echter gemoderniseerd en daarvoor verscherpt. Verzameling en klasse worden onderscheiden en datgene wat intuïtief ondergebracht werd onder het hoofd verzameling, blijkt soms met het predikaat klasse te moeten worden bestempeld om paradoxen te voorkomen.
Het boek geeft echter veel meer dan een inleiding in de axiomatische behandeling. De ontwikkeling van de grondslagen van de verzamelingenleer tot aan de recente ontdekkingen van Cohen worden er op bekwame en beknopte manier in uiteengezet. Eén apart hoofdstuk is gewijd aan de consistentie van het keuzeaxioma en eveneens aan de consistentie van de continuumhypothese.
Buiten het kader van dit boek vallen onderzoekingen, die bepaalde verzamelingen betreffen, zoals de verzameling van de natuurlijke getallen. De belangrijke resultaten door Gödel afgeleid t.a.v. de axiomatische theorie van de natuurlijke getallen vindt men dan ook niet in dit boek. Wie er behoefte aan heeft op grondige wijze met de axiomatiek van de verzamelingenleer in aanraking te komen en daarbij belangstelling heeft voor fundamentele resultaten (en niet speciaal voor afleiding van de 'gewone' theorema uit de verzamelingentheorie), kan ik de studie van dit boek zeker aan bevelen.

P.G.J. Vredenduin

C. Petersen en E. Feddersen,
a. *Trigonometrie, Kernprogramm,* 330 schakels, DM 10,80;
b. *Trigonometrie, Zusatzprogramm,* 120 schakels, DM 5,20;
met bijbehorende *Schülerarbeitshefte mit Testblättern* van opv. DM 4,20 en DM 2,20;
Schroedel Verlag 1969; Hannover.

Voor een aankondiging van de deeltjes over logaritmisch rekenen van dezelfde auteurs verwijs ik naar Euclides 46, p.36.
Het kernprogramma heeft betrekking op de rechthoekige en scherphoekige driehoeken en bevat opgaven die met behulp van sinus- en cosinusregel opgelost kunnen worden. Het aanvullend programma vraagt bijzondere aandacht voor berekeningen in stomphoekige driehoeken en bevat opgaven over de grafische voorstellingen van de sinus-, de cosinus-, de tangens- en de cotangensfunctie.
Een gratis bijgevoegd Lehrerheft bevat didactische opmerkingen inzake de gevolgde wijze van programmeren, de leerdoelen, de evaluatie, de inpassing in het onderwijs en diagrammen die betrekking hebben op de resultaten van het experiment dat aan de methode ten grondslag ligt en waarbij meer dan 400 scholieren waren betrokken.
De methode verdient de belangstelling van die Nederlandse wiskundedocenten die zich voor de programmering van het wiskunde-onderwijs interesseren.

Joh. H. Wansink

C.J. Alders e.a., *Wiskunde voor V.W.O. 4 V,* Wolters-Noordhoff N.V. Groningen, 1971, 108 blz., 1e druk, f 9.50.

Dit vierde deel is bestemd voor de vierde klas V.W.O. Behandeld worden: Rijen, logica, verzamelingen, relaties, samengestelde functies, oneigenlijke machten en logaritmen, exponentiële en logaritmische functies, transformaties en oppervlakte en omtrek cirkel.
Op blz. 7 wordt de M-R gedefinieerd m.b.v. $t_{n+1} : t_n$. De consequentie dat $t_n \neq 0$ is niet toegepast. (zie opm. 1) Ook de voegwoorden worden nog wel eens door komma's vervangen.
Op blz. 31 moet op regel 7 v.b. de derde term van $f(x)$: c zijn. Het is niet duidelijk of het kwadraat afsplitsen gebruikt wordt om de nulpunten te bepalen. (blz. 31). De bewijzen van de logaritmeneigenschappen kunnen m.i. wel wat eleganter. Waarom niet direct de definitie gebruikt?

B.v. $^{g}\log ab = {}^{g}\log\left\{g^{^{g}\log a} \cdot g^{^{g}\log b}\right\} = {}^{g}\log\left\{g^{^{g}\log a + {}^{g}\log b}\right\} = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b$

Men kan dan elke eigenschap in één regel bewijzen.
Op blz 67, 3e regel v.b. staat: grondgetal.
De uitvoering is goed verzorgd.

Burgers

Irving Drooyan e.a., *Programmed Beginning Algebra,* John Wiley and Sons, New York, 1971, 5 delen, £ 7.—

Het geheel bevat de volgende onderwerpen:

deel I natuurlijke en gehele getallen.
deel II vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad, één variabele.
deel III breuken en gebroken vergelijkingen.
deel IV grafieken en lineaire systemen; wortels.
deel V kwadratische vergelijkingen.

Elk deel is een werkschrift, met een groot aantal vraagstukken waarop een kort ondubbelzinnig antwoord mogelijk is. De vraag staat rechts, het antwoord links op de bladzijde afgedrukt. Met een kaart (aanwezig in elk deel) dient de gebruiker de antwoordenkolom te bedekken.
In Amerika (aan het Pierce College te Los Angeles) beschouwt men de stof, bevat in de vijf delen, tot de algebra die een redelijk begaafde leerling aan het eind van het eerste jaar verwerkt moet hebben. Ik zou erg blij zijn, wanneer ik bij mijn redelijk begaafde leerlingen aan het eind van het tweede jaar (V.W.O.) op deze kennis zou kunnen teruggrijpen (Ik gebruik 'Moderne Wiskunde').
Mogelijk zijn voor het snel te bereiken resultaat met behulp van Programmed Beginning Algebra (P.B.A.) de volgende oorzaken te geven:

1 P.B.A. werkt via een lange, langzaam in moeilijkheid toenemende reeks vraagstukken effectief en doelgericht toe naar het verkrijgen van een onontbeerlijke basiskennis.
2 Vooral jonge leerlingen vinden het werken met een geprogrammeerde instructie vaak erg plezierig. 'Het doen' betekent meer voor ze dan het lezen van en luisteren naar voor hen vaak te lange redeneringen. (Dit geldt vooral voor toekomstige MAVO en HAVO leerlingen.)
3 Huiswerk opgeven lijkt me niet P.B.A. uiterst zinvol. Zwakke leerlingen hoeven niet steeds met lege handen op school te komen.

Ideaal lijkt me in een brugklas om b.v. de eerste dertig minuten van een algebra-les te beginnen met het aan de orde stellen van meer gecompliceerde vraagstukken welke klassikaal worden opgelost en daarna de leerling zelfstandig aan de P.B.A.-vragen te laten werken.

H. Zunneberg

J. Wloka, *Funktionalanalysis und Anwendungen*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1971, 291 bl., DM 38.

Dit is een leerboek over funktionaalanalyse, waarbij de schrijver zich beperkt heeft tot de theorie der genormeerde ruimten. Het eerste hoofdstuk draagt een inleidend karakter; hierin worden de metrische ruimten ingevoerd en als belangrijke stellingen worden al direkt de kategoriestelling van Baire en de kontraktiestelling van Banach behandeld, met toepassingen op existentiestellingen voor differentiaalvergelijkingen en integraalvergelijkingen. In het tweede en derde hoofdstuk vindt men dan de theorie der genormeerde vektorruimten; van bijzonder belang is hierbij de 'differentiaalrekening' in deze ruimten, waarin men ziet hoe vele bekende stellingen uit de theorie van funkties van eindig veel variabelen gegeneraliseerd kunnen worden. In het vierde hoofdstuk tenslotte laat de schrijver zien hoe dit alles toegepast kan worden bij integraalvergelijkingen, bij randproblemen en bij elliptische differentiaalvergelijkingen. In een inleidende paragraaf worden enige stellingen over Lebesguese integratie (zonder bewijs) behandeld; de hiermee nietvertrouwde lezer late zich hierdoor niet afschrikken. De uitvoering van het boek is fraai. Voor verdere studie wordt slechts verwezen naar het boek van Köthe en het boek van Dunford-Schwartz, wat wel wat karig is.

A.C. Zaanen

W. Junkers, *Mehrwertige Ordnungsfunktionen* (Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Helft 3). Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1971, 90 bl. DM 24.

Ongeveer 25 jaar geleden werd door E Sperner (aan wie het hier te bespreken boekje opgedragen is) het begrip van een 'ordefunktie' ingevoerd. Globaal gezegd betekent dit dat de ordefunktie f aan ieder niet-incident paar (h,α) van een ruimte, waarbij h een hypervlak en α een punt in die ruimte is, één der waarden $+1$ of -1 toevoegt, zodanig dat bij vaste h de verzameling van alle α met $f(h,\alpha)=-1$ de ene kant, en de verzameling van alle α met $f(h,\alpha)=+1$ de andere kant van h 'voorstelt'. Dit wordt hier gegeneraliseerd tot het geval dat de ordefunktie meer dan twee waarden aan kan nemen. Een hypervlak heeft dan niet twee 'kanten', maar meerdere 'zones'. De algemene theorie vindt

speciaal toepassing in projektieve ruimten (Hfdst. 3) en in projektieve ruimten, waarin bovendien het axioma van Desargues geldt (Hfdst. 4).

A.C. Zaanen

W. Maier und H. Kiesewetter, *Funktionalgleichungen mit analytischen Lösungen* (Studia Mathematica, Band 20), Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, Zürich, 1971, 184., DM 45.

Sinds het verschijnen van het boek 'Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen' door J. Aczél in 1961 heeft de theorie der funktionaalvergelijkingen zich verder ontwikkeld. In het hier te bespreken boekje wordt over die verdere ontwikkeling iets medegedeeld, en wel voornamelijk voorzover het betreft het verband tussen zekere funktionaalvergelijkingen en de theorie der analytische funkties. De auteurs zijn wiskundigen uit de DDR (Jena en Rostock), en de in het boek behandelde materie is voor een gedeelte ontstaan uit hun eigen onderzoek. Er zijn vier hoofdstukken. In het eerste hoofdstuk (getiteld: Lineare Funktionalgleichungen) wordt o.a. aandacht besteed aan de vergelijking $f(x)+f(y)=f[\psi(x,y)]$; over het bijzondere geval $\psi(x,y)=x+y$ bestaat een uitgebreide literatuur. In het tweede hoofdstuk wordt het probleem beschouwd in hoeverre een analytische funktie bepaald is door zijn singulariteiten, door zekere periodiciteitseigenschappen en door zijn gedrag in het oneindige (al of niet binnen een bepaalde strook van het komplexe vlak blijvend). Het derde en vierde hoofdstuk zijn gewijd aan toepassingen op de getaltheorie en de meetkunde.

A.C. Zaanen

Annals of Systems Research, vol. 1, 1971, editor B. van Rootselaar, H.E. Stenfert Kroese N.V., Leiden, VII + 88 blz., *f* 20,—.
Het boek bestaat uit de teksten van voordrachten gehouden op 9 mei 1970 en 23 januari 1971 op bijeenkomsten van de Systeemgroep Nederland. De bedoeling is, dat latere jaarboeken ook ingezonden artikelen zullen bevatten.
In een achttal bijdragen wordt uiteengezet, waarom het in de systeemtheorie (systeemanalyse) in wezen gaat. Van Rootselaar legt uit, dat vanuit logisch oogpunt in de systeemtheorie fundamenteel is het gebruik van functionalen. Het gaat namelijk om het verband tussen inputfuncties en outputfuncties en een functioneel verband tussen functies wordt functionaal genoemd. A.C.J. de Leeuw geeft een mathematisch-logisch gestructureerde definitie van een systeem en in deze definitie speelt de functionaal inderdaad een centrale rol. Ruw gezegd komt de definitie hierop neer, dat een verzameling W een systeem is, als elke niet lege deelverzameling W_1 van W met zijn complement gerelateerd is. En gerelateerd wil zeggen, dat er een functionaal is, die de mogelijke veranderingen van W_1 in de tijd afbeeldt naar de mogelijke veranderingen van het complement van W_1 in de tijd.
Verscheidene soorten systemen passeren de revue. W. Meuwese bespreekt experimenten met bepaalde leereenheden (input), waarvan door middel van een test (output) nagegaan werd, in hoeverre ze geschikt waren om personen bepaalde kennis bij te brengen. E.C. Wassink bespreekt een biologisch voorbeeld. Veel aandacht wordt uiteraard besteed aan voorbeelden uit het bedrijfsleven. Men ziet daar, hoe in een onderneming een output van een onderdeel als input kan optreden voor een volgend deel van het produktieproces. Tenslotte lezen we in een artikel van P.C. van de Griend van welke aard de relatie kan zijn van persoon tot groep en van groep tot meer omvattende groep (b.v. in verband met democratie). Men ziet in dit artikel nauwelijks het verband met de overige, doordat de rol van input en output niet expliciet naar voren gebracht worden.
Het geheel geeft een ietwat kaleidoscopisch, maar daardoor juist aantrekkelijk overzicht over de betekenis van deze nog jonge wetenschap.

P.G.J. Vredenduin

Berichten

Het Eindexamen Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek

Door de Inspectie van het voortgezet onderwijs is begin januari de volgende brief verzonden aan de rectoren van de scholen voor vwo:

Het programma 'Wiskunde eindexamen v.w.o. met ingang van het schooljaar 1973/74 aan dag- en avondscholen voor v.w.o.' vermeldt bij het vak wiskunde I als laatste zinsnede:

'In verband met de invoering van een modern programma voor wiskunde kan de inspectie bepalen dat één of meer onderwerpen bij het schriftelijk examen niet aan de orde zullen worden gesteld. Indien de inspectie van deze mogelijkheid gebruik maakt, wijst zij voor de aanvang van het schooljaar waarin het examen zal worden afgenomen, bovenbedoelde onderwerpen aan.'

Het College van Inspecteurs van het voortgezet onderwijs (vwo-havo) heeft besloten van deze bepaling gebruik te maken.

Bij het centraal schriftelijk examen van het vak wiskunde I zullen aan het einde van de cursusjaren 1973/74 en 1974/75 geen vragen of vraagstukken opgegeven worden die betrekking hebben op het onderdeel: 'Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek'.

Het staat het bevoegd gezag van de scholen uiteraard vrij dit onderdeel bij het schoolonderzoek wel of niet te introduceren.

Dit besluit is genomen op grond van de navolgende overweging.

De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde heeft in de jaren 1969-1971 een experiment 'Waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek' georganiseerd aan 7 scholen voor v.h.-m.o. Het ligt in de bedoeling dit experiment in de jaren 1972-1974 aan een groter aantal scholen voort te zetten. De resultaten van dit experiment zullen aanwijzingen moeten geven welke leerstofomschrijving voor dit onderdeel bij het vak wiskunde I wenselijk en haalbaar is.

Het Achtste Nederlands Mathematisch Congres.

Dit wordt gehouden op 5 en 6 april 1972 te Groningen; het wordt georganiseerd door de vakgroep wiskunde van de Rijksuniversiteit te Groningen, onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap. Voor alle inlichtingen wende men zich tot de secretaris van de organisatiecommissie, adres; Mathematisch Instituut, Hoogbouw WSN, Postbus 800, Groningen.

Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen.

De voorjaarsvergadering zal zijn op zaterdag 15 en zondag 16 april 1972 te Amersfoort. Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen wenden tot de secretaris, Dr. A.J.E.M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Congres voor Leraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen.

Het Bestuur van dit Congres deelt mede dat het besloten heeft het Congres op te heffen omdat:

a er een sterk dalende belangstelling is voor het Congres, hetgeen waarschijnlijk veroorzaakt wordt door vele andere vergaderingen van docenten

b het organiseren van een Congres steeds kostbaarder wordt, terwijl subsidies moeilijker verkregen kunnen worden.

Drs. J. Hoogeveen
secretaris.

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Praxis der Mathematik, XII, 8-12 en XIII, 1-6, augustus 1970 – juni 1971.

E. Reiche, Logarithmen vor Potenzen?
H. Ahbe, Nichtreelle Zaklen und Gleichungslehre;
Fr. Haeberlen, Eine Teilbarkeitsregel für die Zahl 7;
H. Töpfer, Propädeutik der analytischen Geometrie.

H. Zeitler, Anregungen zur Oberstufengeometrie;
Chr. Spellenberg, Schnittpunkte Ellipse und Sekante;
I. Paasche, Zur Inversion singulären Matrizen;
P. Sahmel, Variante des Pascal-Dreiecks;
A. Rindler, Mathematik-Olympiaden in Österreich und Ungarn.

Kl. Wigand, Optimieren;
Fr. Barth en R. Haller, Ein zweckmässiges Differenzierbarkeitskriterium;
H. Töpfer, Propädeutik der analytischen Geometrie.

K. Jarworek, Lösung quadratischer Gleichungen mittels Skalarprodukt;
E. Wittmann, Propädeutische Gleichungslehre auf konstruktiver Basis.

J. C. Binz, Endliche Ringe;
H. Ahbe, Vektoren bei Extremwertaufgaben?
H. von Majewski, Einteilung der Vierecke mittels des Teilungsverhältnisses der Diagonalen.

Kl. Wigand, Gleichunglösen durch Diagramme;
Fr. Haeberlen, Boole – Zahl – Lücken;
K. Jaworek, Ellipse und Skalarprodukte;
G. Brill, Kriterien für relative Extrema differenzierbarer Funktionen;
H. Töpfer, Darstellende Geometrie.

P. Fr. Harm, Wie ungenau darf mein R-Stab-Ergebnis sein?
H. H. Lammerich, Rechenstab, Aquivalenzrelationen und Gruppentheorie;
K. Kemmler, Rekurrente Folgen, Gruppen und Körper;
J. E. Hofmann, Umfangsgleiche Vielecke.

H. Schickert, Die Euler-Gleichung;
H. Wlodarski, Maximum-Aufgaben in der Physik;
E. Winkler, Räumliche Koordinatendrehung;
J. C. Binz, Endliche Modelle gesetzarmen algebraischer Strukturen;
H. Bauer, Die besonderen Transversalen als Mittellinien.

J. E. Hofmann, Dürer als Mathematiker;
E. Knup, Vektoren bei Extremwertaufgaben?
W. Streb, Einführung der trigonometrischen Funktionen;
W. G. Felmy, Zum Goldenen Schnitt;
H. Töpfer, Darstellende Geometrie.

Fr. Haeberlen, Ein Weg zum Euklid-Algorithmus;
W. Hanns, Lösung quadratischer Gleichungen mittels Skalarprodukt.

G. Müller, Stetigkeit und andere Funktionseigenschaften;
H. Heimüller, Elastizität einer Funktion;
G. Schostack, Gleichzentrische basisgleiche Dreiecke.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73. Oosterbeek.

274 Onze vriend Kootstra wenst de lezers van Euclides een goed 1972 en vraagt zich af, wat het laatste van 0 verschillende cijfer van 1972! wel zou zijn. Kunt u hem helpen?*

275 De punten $A_1, A_2, \ldots A_6$, zijn hoekpunten van een regelmatige zeshoek. Onder een zeshoek verstaan we elke gebroken gesloten lijn $A_1A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}A_1$ ($A_1, \ldots, A_{i_5}$ alle verschillend). Hoeveel verschillende (niet-congruente) dergelijke zeshoeken zijn er mogelijk?

Oplossingen

272 In het platte vlak worden n punten, waarvan er geen drie op één lijn liggen, door gerichte lijnstukken verbonden, waardoor p driehoeken ontstaan, die volgens de gekozen richting doorlopen kunnen worden. Gevraagd een realisering van de gevallen $p = 0$ en $p = (n-1)\, n\, (n+1)$ (n oneven), $p = (n-2)\, n\, (n+2)$ (n even)

a. $p = 0$. Rangschik de punten totaal lineair en noem ze $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Kies de verbindingsrichting van A_i naar A_j als $i < j$.

b. $p = (n-1)\, n\, (n+1)$, n oneven. Rangschik de punten cyclisch.
Kies de richting van A_i naar A_j, als men van A_i een oneven aantal punten verder moet gaan om voor het eerst A_j te bereiken. (Is $n = 13$, dan zijn b.v. driehoeken, die voldoen, $A_1A_4A_9$, $A_4A_{11}A_1$.)
Om het aantal driehoeken te vinden, bepalen we eerst het aantal manieren, waarop het oneven getal n te schrijven is als som van drie oneven getallen (waarbij verschillende volgorden van deze getallen als verschillende manieren gerekend worden; b.v. $13 = 3 + 5 + 4$, $13 = 5 + 3 + 4$ zijn verschillend).
We moeten dus het aantal mogelijkheden vinden om n te schrijven als $2p - 1 + 2q - 1 + 2r - 1$. Of, anders geformuleerd, we moeten het aantal geordende paren positieve gehele getallen p en q vinden, waarvoor

$$2p - 1 + 2q - 1 < n,$$

$$p + q < \tfrac{1}{2}n + 1,$$

$$p + q \leqslant \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}$$

Dit aantal is gelijk aan het aantal manieren, waarop men uit $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ naast elkaar geplaatste streepjes er 2 kan kiezen. Het aantal is dus

$$(\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2})\,(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2})/2.$$

Nu kan men in elk punt beginnen. Het gevonden aantal moet dus nog met n vermenigvuldigd worden. Men krijgt dan echter elke driehoek 3 keer, zodat nog door 3 gedeeld moet worden. Zodat men inderdaad vindt

$$p = (n+1)\, n\, (n-1)/24$$

c. $p = (n-2)\, n\, (n+2)/24$, n even. Kies de hierboven gevonden realisatie voor $n + 1$ punten. Laat 1 punt weg en alle daarvan uitgaande lijnstukken. Een eenvoudige berekening leert dan, dat men inderdaad $(n+1)\, n\, (n-1)/24$ driehoek overhoudt.

* Deze opgave bereikte mij pas in januari. Hij is echter te aardig om hem de lezers te onthouden.

273 Gevraagd werd een aantal kaartjes met twee letters op de wijze van dominostenen cyclisch aan elkaar te passen. Elke letter komt even vaak als begin- en als eindletter voor. Elke letter is uitgaande van elke andere letter door aanpassing bereikbaar.

Begin maar, b.v. AV – VP – PQ – QB. Het is niet mogelijk, dat we niet verder kunnen, want dan zouden er niet evenveel begin- als eindletters B zijn. We kunnen dus in elk geval doorgaan, totdat we een cykel krijgen. Kunnen we dan niet verder, dan beginnen we met de rest van onze voorraad kaartjes opnieuw en vormen een tweede cykel.
Enzovoorts, totdat de kaartjes opgebruikt zijn.
De volgende stap zal zijn het aantal cykels te verminderen. Kies een van de cykels. Het is dan mogelijk onder de overblijvende er een aan te wijzen, die met de gekozen cykel een letter gemeen heeft.Immers onderstel dat dit niet het geval is en dat A tot de gekozen cykel behoort en B tot een van de andere. Dan zou het niet mogelijk zijn een serie te vormen, die met A begint en met B eindigt. Neem nu aan, dat A zowel in de gekozen cykel voorkomt als in een van de andere. We kunnen dan de beide cykels bij A openknippen en daarna tot één cykel verenigen. Iteratie van dit proces levert de verlangde ene cykel, die alle kaartjes bevat.

INHOUD